Tentamen Discrete Structuren

donderdag 21 augustus 2003, 8.30 - 11.30 uur

Elke opgave levert maximaal 15 punten op. Het cijfer is (p/10) + 1, afgerond op gehele en halve waarden, waarbij p het totaal aantal behaalde punten is.
Er is **geen** vrijstelling op grond van toetsresultaten.

NB. Beargumenteer je antwoorden.

1. (a) Definieer: propositie p is invariant van de loop **while** g **do** S.
   (b) Is het mogelijk dat $\neg g$ invariant is van de loop **while** g **do** S?

2. Laat X de machtsverzameling (*power set*) van $\{1, 2, 3\}$ zijn, dwz. X is de verzameling van deelverzamelingen van $\{1, 2, 3\}$.
   (a) Geef een expliciete definitie van X, dwz. een definitie waarin de elementen van X opgesomd worden.
   (b) Op X definiëren we de relatie R door
   $$R = \{(x, y) \in X^2 \ : \ 1 \in (x \cap y)\}.$$
   Is R reflexief? symmetrisch? transitief? antisymmetrisch? functioneel?
   (c) Wat is de kleinste equivalentie-relatie op X die R omvat?

3. Bewijs *met volledige inductie* dat voor alle $n \in N$ geldt: het aantal deelverzamelingen van $\{1, \ldots, n\}$ is gelijk aan 2^n (hierbij geldt $\{1, \ldots, 0\} = \emptyset, \{1, \ldots, 1\} = \{1\}$).

4. Een propositionele formule is in *conjunctieve normaalvorm* als het een conjunctie van disjuncties van (negaties van) propositionele variabelen is.
   (a) Zet $\neg(p \wedge ((q \leftrightarrow r) \rightarrow r))$ *via een geannoteerd lineair bewijs* om in een conjunctieve normaalvorm.
   (b) Bekijk de volgende conjunctieve normaalvormen:
   $$p \wedge (q \vee r \vee \neg q)$$
   $$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q)$$
   $$(p \vee \neg q) \wedge q$$
   $$(p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge q$$
   Elk van deze conjunctieve normaalvormen kan vereenvoudigd worden, dwz. vervangen worden door een logisch equivalente conjunctieve normaalvorm die korter is. Laat dit zien.

5. (a) Geef een definitie van het begrip *boom* (tree).
   (b) Formuleer en bewijs de stelling over het verband tussen het aantal knopen (vertices) en het aantal kanten (edges) van een boom.

6. (a) Wanneer zijn twee verzamelingen even groot (have the same size)?
   (b) Wanneer is een verzameling aftelbaar oneindig?
   (c) Laat zien dat Z, de verzameling van gehele getallen, aftelbaar oneindig is.
   (d) Laat zien dat Q, de verzameling van rationale getallen, aftelbaar oneindig is.